Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 44–49

Односторонние приближения в L линейной комбинации ядра Пуассона и сопряженного ядра Пуассона тригонометрическими полиномами

А. Г. Бабенко, Т. З. Наум

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия

Аннотация. Пусть $q \in (-1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Pi_{q,\alpha}(t) = \cos(\alpha\pi/2)P(t) + \sin(\alpha\pi/2)Q(t)$ — линейная комбинация ядра Пуассона $P(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ и сопряженного ядра Пуассона $Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt$. Рассматривается задача наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра $\Pi_{q,\alpha}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного. В случае $\alpha = 0$ задачу решили В. Г. Доронин и А. А. Лигун в 70-х годах прошлого века. Здесь приводится решение в общем случае $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Обозначения. В дальнейшем используются следующие обозначения:
L — пространство 2π-периодических измеримых вещественнозначных функций с нормой

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt;$$

$\mathcal{T}_{n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов

$$\tau(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t)$$

порядка не выше $n-1$ с вещественными коэффициентами;

$$E_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1}} \|g-\tau\|,$$

$$E^{-}{}_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1},\,\tau\leqslant g} \|g-\tau\|, \qquad E^{+}{}_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1},\,g\leqslant\tau} \|g-\tau\| \tag{1}$$

— величины наилучшего приближения, наилучшего приближения снизу и сверху ограниченной функции $g \in L$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ по норме пространства L соответственно. Тригонометрические полиномы, реализующие точные нижние грани в правых частях равенств (1), называются *полиномами наилучшего* (*интегрального*) *приближения функции* g *и наилучшего одностороннего* (*интегрального*) *приближения* (*снизу и сверху*) *соответственно.*

Ясно, что $E_{n-1}(g) \leqslant \min\{E^{-}{}_{n-1}(g),\ E^{+}{}_{n-1}(g)\}$. Интересно знать, в каких пределах может изменяться отношение $\dfrac{\min\{E^{-}{}_{n-1}(g),\ E^{+}{}_{n-1}(g)\}}{E_{n-1}(g)}$. Ответ на это вопрос представляет

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

интерес, поскольку величины $E^{-}{}_{n-1}(g)$, $E^{+}{}_{n-1}(g)$, как показывает опыт, находить легче, чем $E_{n-1}(g)$.

Зафиксируем произвольное число $q \in (-1,1)$. *Ядром Пуассона и сопряженным ядром Пуассона* называются соответственно (см. [4, т. 1, гл. 1, § 1, с. 12; гл. 3, § 6, формулы (6.2), (6.3)]) функции

$$P(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ikt}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1-q^2}{2(1-2q\cos t + q^2)},$$

$$Q(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ikt}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t + q^2}.$$

Линейную комбинацию $\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right)P(t) + \left(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)Q(t) = \Pi_{q,\alpha}(t)$ условимся называть *обобщенным ядром Пуассона* с параметрами $q \in (-1,1)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Краткая история вопроса. Формулировка основного результата. Задачу наилучшего одностороннего интегрального приближения ядра $\Pi_{q,\alpha}$ в важном частном случае $\alpha = 0$ исследовали В.Г. Доронин и А.А. Лигун. Они нашли величины наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ тригонометрическими полиномами [5, лемма 3] (см. [6, теорема 3.2.2]), а именно,

$$E^{-}{}_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1+q^n}, \qquad E^{+}{}_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1-q^n}, \quad 0 < q < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $q \in (-1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$E^{-}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1-q^{2n}}\left(1 - |q|^n \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad E^{+}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1-q^{2n}}\left(1 + |q|^n \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

З а м е ч а н и е. В случае $\alpha = 0$ с помощью замены переменной $x = \cos t$ задача одностороннего интегрального приближения ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ сводится к задаче одностороннего приближения простейшей алгебраической дроби на отрезке $[-1,1]$ алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Чебышева первого рода. Поскольку производная произвольного порядка указанной простейшей дроби сохраняет знак на $[-1,1]$, то результат Р. Боянича и Р. ДеВора [10, Theorem 4 and Remark] дает конструкцию полиномов наилучшего одностороннего приближения. В общем случае $\alpha \in \mathbb{R}$ этот способ нахождения полиномов наилучшего одностороннего приближения не применим.

3. Вспомогательные утверждения. Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha) := E^{-}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}), \qquad \mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha) := E^{+}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}). \tag{2}$$

Ядро $\Pi_{q,\alpha}$ имеет следующие представления:

$$\Pi_{q,\alpha}(t) = \cos\frac{\alpha\pi}{2}P(t) + \sin\frac{\alpha\pi}{2}Q(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2} + 2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1-2q\cos t + q^2)}.$$

Поскольку $\Pi_{q,\alpha}(t+\pi) = \Pi_{-q,\alpha}(t)$, то

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha) = \mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(-q,\alpha) = \mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(|q|,\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ q \in (-1,1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому задача вычисления величин (2) при $q \in (-1,1)$ сводится к случаю $q \in (0,1)$, который в дальнейшем и будем рассматривать; в случае $q = 0$, как нетрудно видеть, $\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(0,\alpha) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Приведем еще два свойства обобщенного ядра Пуассона:

$$\Pi_{q,\alpha+4}(t) = \Pi_{q,\alpha}(t), \quad \Pi_{q,\alpha+2}(t) = -\Pi_{q,\alpha}(t) \quad \text{при} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ q \in (0,1),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Из первого равенства в (3) следует 4-периодичность величин $\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha)$ по α, т. е.

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha+4) = \mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ q \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $\alpha \in [0,4]$. Из второго равенства в (3) вытекает, что

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha+2) = \mathcal{E}^{\mp}_{n-1}(q,\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha \in [0,2],\ q \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что из двух величин $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$, $\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)$ достаточно найти лишь величину $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$, поскольку $\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)$ выражается через $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$ с помощью формулы (4), а именно

$$\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha) = \begin{cases} \mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha+2) & \text{при} \quad \alpha \in [0,2], \\ \mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha-2) & \text{при} \quad \alpha \in [2,4]. \end{cases} \tag{5}$$

Ядро $\Pi_{q,\alpha}$ является непрерывно дифференцируемой 2π-периодической функцией, поэтому в силу теоремы 1.8.1 из [6, гл. 1, § 1.8] существует единственный полином из $\mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения снизу для $\Pi_{q,\alpha}$.

Напомним известное утверждение (см. [6, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5]), на основе которого с помощью квадратурной формулы (6) в дальнейшем будет получена оценка снизу искомой величины $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$.

Теорема A. *Пусть квадратурная формула*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tau(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k \tau(x_k)$$

с неотрицательными коэффициентами $p_1,\dots,p_m$ *справедлива для любого полинома* $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$. *Тогда для любой непрерывной* 2π*-периодической функции* g *выполняются неравенства*

$$E^{+}{}_{n-1}(g) \geqslant \sum_{k=1}^{m} p_k g(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx, \qquad E^{-}{}_{n-1}(g) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m} p_k g(x_k).$$

Зафиксируем произвольное вещественное число ξ. Хорошо известна (см. [4, т. 2, гл. 10, формула (2.5)], [6, гл. 1, § 1.7, предложение 1.7.2]) квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tau(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(\xi + \frac{2k\pi}{n}\right), \tag{6}$$

которая выполняется для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$.

В статье [1] Н. А. Барабошкиной [1] для построения полинома наилучшего интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ (без ограничения на расположение графика приближающего

---

[1] На основе результатов [1] в [2, теорема 1] при $q \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ найдена следующая компактная формула для $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$:

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = (2\cos\widetilde{\alpha})\operatorname{arctg}\frac{2q^n\cos\widetilde{\alpha}}{s(q,\widetilde{\alpha},n)} + (\sin\widetilde{\alpha})\ln\frac{s(q,\widetilde{\alpha},n)+2q^n\sin\widetilde{\alpha}}{s(q,\widetilde{\alpha},n)-2q^n\sin\widetilde{\alpha}},$$

где $s(q,\widetilde{\alpha},n) = \sqrt{1-2q^{2n}\cos 2\widetilde{\alpha} + q^{4n}}$, $\widetilde{\alpha} = \alpha\pi/2$. Важные частные случаи этой формулы были установлены ранее Б. Надем [11] ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$) и М. Г. Крейном [7] ($\alpha = 0$). В общем случае величину $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ нашел А. В. Бушанский [3] в виде максимума модуля функции, представленной в виде ряда; В. Т. Шевалдин [9] предложил другой метод доказательства этого результата. Более подробные исторические сведения, относящиеся к задаче о $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$, содержатся в [8, § 7], [9], [1].

полинома) был предложен подход, основанный на представлении тригонометрической дроби

$$B_n(t) = \frac{\gamma^* \sin n(t-\xi^*)}{1+q^2-2q\cos t}$$

в виде суммы $B_n = \tau + r$, в которой τ — некоторый тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, а r — остаток. Реализация указанного подхода заключается в подборе параметров γ^*, ξ^* таким образом, чтобы остаток r совпал с $\Pi_{q,\alpha}$. Для этого использовалось следующее утверждение [1, лемма 1], которое будет применяться и в данной работе.

Лемма A (Н. А. Барабошкина). *При любых $q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\frac{\cos nt}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{c(n)}{1+q^2-2q\cos t} + R_{n-1}(\cos t),$$

$$\frac{\sin nt}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{d(n)\sin t}{1+q^2-2q\cos t} + (\sin t) Q_{n-2}(\cos t),$$

в которых

$$c(n) = \frac{1+q^{2n}}{2q^n}, \qquad d(n) = \frac{1-q^{2n}}{(1-q^2)q^{n-1}},$$

$R_{n-1}(x)$ и $Q_{n-2}(x)$ — некоторые алгебраические многочлены степени $n-1$ и $n-2$ соответственно, причем $R_0(x) \equiv -1/(2q)$, $Q_{-1}(x) \equiv 0$.

4. Обоснование основного результата. В данном разделе строится полином наилучшего интегрального приближения снизу ядра $\Pi_{q,\alpha}$, при этом применяется подход, аналогичный тому, который использовался в [1]. Применяемый подход основан на представлении неотрицательной тригонометрической дроби (10) в виде суммы некоторого тригонометрического полинома порядка не выше $n-1$ и остатка, причем параметры выбираются таким образом, чтобы остаток совпал с приближаемым ядром $\Pi_{q,\alpha}$.

Введем следующие величины, зависящие от параметров q, α и n:

$$\gamma = \gamma(q,\alpha,n) = \frac{2q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2}\left(1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right), \tag{7}$$

$$\sigma = \sigma(q,\alpha,n) = \frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left\{\frac{1-q^2}{\gamma(q,\alpha,n)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 1\right\} = \frac{(1+q^{2n})\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 2q^n}{1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}}. \tag{8}$$

Заметим, что

$$\gamma(q,\alpha,n) > 0 \quad \text{и} \quad |\sigma(q,\alpha,n)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad q\in(0,1), \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Ключевую роль в дальнейшем играет следующая тригонометрическая дробь:

$$B(t) = B_{q,\alpha,n}(t) = \frac{\gamma\left\{\cos\frac{n(t-\xi)}{2}\right\}^2}{1+q^2-2q\cos t}, \tag{10}$$

в которой величина $\gamma = \gamma(q,\alpha,n)$ задана формулой (7), а параметр ξ связан с величиной (8) соотношением

$$\cos n\xi = \sigma(q,\alpha,n). \tag{11}$$

Дробь $B(t)$ неотрицательна при всех $t\in\mathbb{R}$ в силу первого неравенства в (9). Связь этой дроби с обобщенным ядром Пуассона выражает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $q\in(0,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, дробь $B(t) = B_{q,\alpha,n}(t)$ задана формулой* (10), *где величина $\gamma = \gamma(q,\alpha,n)$ задана формулой* (7), *а параметр ξ связан с величиной* (8) *соотношением* (11). *Тогда разность*

$$B(t) - \Pi_{q,\alpha}(t) = Y(t) \tag{12}$$

представляет собой тригонометрический полином порядка не выше $n-1$. Причем $-Y$ является полином наилучшего интегрального приближения снизу для $\Pi_{q,\alpha}$ и

$$E^{-}{}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \|B\| = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(1 - q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{13}$$

Из этой леммы и соотношения (5) следуют утверждения теоремы 1.

Краткая схема доказательства леммы 1. Предположим, что для некоторого положительного γ и вещественного ξ дробь (10) удовлетворяет соотношению (12) с некоторым полиномом $Y \in \mathcal{T}_{n-1}$. Тогда полином $-Y$ будет полиномом наилучшего интегрального приближения снизу для $\Pi_{q,\alpha}$. Действительно, с одной стороны, из неотрицательности $B(t)$ следует неравенство

$$-Y(t) \leqslant \Pi_{q,\alpha}(t) \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R},$$

поэтому

$$E^{-}{}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \leqslant \|\Pi_{q,\alpha} - (-Y)\| = \|\Pi_{q,\alpha} + Y\| = \|B\|.$$

С другой стороны, в силу теоремы A и квадратурной формулы (6) (с учетом совпадением ядра $\Pi_{q,\alpha}$ с приближающим его полиномом в узлах указанной квадратурной формулы) имеем

$$E^{-}{}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Pi_{q,\alpha}(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Pi_{q,\alpha}\left(\xi + \frac{2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Pi_{q,\alpha}(t)\,dt + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}Y\left(\xi + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\Pi_{q,\alpha}(t) + Y(t)\right\}\,dt = \|B\|.$$

Следовательно,

$$E^{-}{}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \|B\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}B(t)\,dt.$$

Для вычисления $\|B\|$, преобразуем дробь (10)

$$B(t) = \frac{\gamma\left\{\cos\frac{n(t-\xi)}{2}\right\}^2}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{\gamma\{1+\cos n(t-\xi)\}}{2(1+q^2-2q\cos t)} = \gamma\frac{1+\cos nt\cos n\xi + \sin nt\sin n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}. \tag{14}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha) = E^{-}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}B(t)\,dt = \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos nt\cos n\xi + \sin nt\sin n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt =$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt + \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nt\cos n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt =$$

$$= \frac{\gamma}{1-q^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(t)\,dt + \frac{\gamma\cos n\xi}{1-q^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(t)\cos nt\,dt = \frac{\gamma(1+q^n\cos n\xi)}{2(1-q^2)}.$$

Таким образом, имеем

$$\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha) = \frac{\gamma(1+q^n\cos n\xi)}{2(1-q^2)}. \tag{15}$$

Осталось найти γ и $\cos n\xi$. Применив лемму A к последней части цепочки равенств (14), получим представление

$$B(t) = \gamma\frac{1+\cos nt\cos n\xi + \sin nt\sin n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)} = Y(t) + H(t),$$

в котором Y — некоторый тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, а H — остаток от деления, который задается формулой

$$H(t)=\gamma\frac{1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t}{2(1+q^2-2q\cos t)}.$$

Таким образом, задача свелась к поиску положительного параметра γ и вещественного параметра ξ таких, чтобы H совпал с $\Pi_{q,\alpha}$. Иными словами, по переменной $t\in\mathbb{R}$ должно выполняться тождество

$$\gamma\frac{1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t}{2(1+q^2-2q\cos t)}\equiv\frac{(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}+2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1-2q\cos t+q^2)},$$

которое равносильно следующему:

$$\gamma\big[1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t\big]\equiv(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}+2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t.$$

Отсюда приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases}\gamma\big[1+c(n)\cos n\xi\big]=(1-q^2)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2},\\ \gamma d(n)\sin n\xi=2q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\end{cases}$$

с двумя неизвестными γ и ξ. Решение этой системы с дополнительным условием $\gamma>$ >0 выражается приведенными выше формулами (7), (8), (11). С учетом этих формул и равенства (15), приходим к утверждению (13). □

Список литературы

1. *Барабошкина Н.А.* Приближение в L линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного тригонометрическими полиномами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 79–86.
2. *Барабошкина Н.А.* Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 71–78.
3. *Бушанский А.В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. С. 2–37.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2 т. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с. Т. 2. 538 с.
5. *Доронин В.Г.*, *Лигун А.А.* Точные значения наилучших односторонних приближений некоторых классов периодических функций // Изв. вузов. Матем. 1979. № 8(207). С. 20–25.
6. *Корнейчук Н.П.*, *Лигун А.А.*, *Доронин В.Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
7. *Крейн М.Г.* К теории наилучшего приближения // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 245–249.
8. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10. С. 207–256.
9. *Шевалдин В.Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Матем. заметки. 1992. Т. 51. Вып. 6. С. 126–136.
10. *Bojanic R.*, *DeVore R.* On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 12. P. 139–164.
11. *Sz. Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Ber. Verh. sächs. Akad., Leipzig. 1938. Bd. 90. S. 103–134.